高次元数論力学系の諸問題

松澤陽介 *（大阪公立大学）

目次

*1

1 はじめに

数論力学系という分野は，代数多様体やそれに類する対象の上の自己写像を数論的観点から研究する分野である．この記事では主にディオファントス幾何と関連の深い数論力学系のいくつかの問題を紹介する．数論力学系は近隣の分野，複素力学系，代数幾何，複素幾何，非アルキメデス幾何等と融合しながら様々な方向に発展している．この分野に興味のある方は是非数年前に出版されたサーベイ [6] を参照していただきたい．

記号

- 体 k 上の多様体とは，k 上有限型な分離的整スキームのこととする．
- 体 k 上の多様体 X とその支配的自己有理写像 $f\colon X \dashrightarrow X$ が与えられたとき，f の n 回繰り返し合成 $f \circ \cdots \circ f$ を f^n と表す．

2 数論力学系

数論力学系は射影直線 $\mathbb{P}^1$ の自己射やそれによる有理点の軌道を数論的観点から研究するという問題を中心に発展してきた．複素力学系が複素平面 $\mathbb{C}$ の自己多項式写像や有理写像を位相・解析的観点から研究するの

* matsuzaway@omu.ac.jp
2023 年 12 月 16 日

に対して，より数論的な視点で同様の力学系を研究すると何が起こっているのかという問題意識が出発点にあったと思われる．

射影直線の数論力学系の研究は非常に多く，とても豊かな数学を提供している．ここではその中から二つの話題を紹介する．

2.1 Dynamical Lang-Siegel 問題

数論力学系の重要かつ典型的な定理として以下の Silverman の定理をまず紹介したい．

定理 2.1 (Silverman 1993 [20])**.** 有理数体上定義された射影直線の自己全射 $f\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ を考える．$\deg f \geqslant 2$ とする．点 $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ であって f-軌道

$$O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

が無限であるようなものを考える．軌道の斉次座標を $f^n(x) = (a(n) : b(n))$ と互いに素な整数 $a(n), b(n)$ を用いて表す．もし

$$f^{-2}((0:1)) \neq \{(0:1)\} \quad \text{かつ} \quad f^{-2}((1:0)) \neq \{(1:0)\} \tag{2.1}$$

ならば，以下が成立する：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|a(n)|}{\log|b(n)|} = 1.$$

注意 2.2. 仮定 (2.1) は点 $(0:1), (1:0)$ の f^2 による (スキーム点としての) 逆像が集合としてそれぞれ $(0:1), (1:0)$ のみからなるという意味である．これは Riemann-Hurwitz などを使えば以下の集合が有限集合であることと同値であることがわかる．

$$\left\{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \;\middle|\; \text{ある } n \geqslant 1 \text{ があり } f^n(P) = (0:1)\right\}$$
$$\left\{P \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \;\middle|\; \text{ある } n \geqslant 1 \text{ があり } f^n(P) = (1:0)\right\}$$

例えば $f = (x^2 : y^2)$ などはこの条件を満たさない．

この定理は軌道の斉次座標を見ると，二つの成分が漸近的にほぼ同じ桁数になるということを主張している．これは Siegel による楕円曲線の点の座標に関する同様の定理の力学系版だと見做せるが，その証明の鍵はどちらもディオファントス近似における Roth の定理であり，本質的に数論的な現象だと言って良いだろう．

Silverman の定理の仮定を満たす f に対して，数値計算例を一つ載せておく．次数 2 の自己射 $f\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}, (x:y) \mapsto (x^2+y^2 : -4xy+y^2)$ と，f による点 $(1:1)$ の軌道を考えよう．このとき $a(n), b(n)$ は (符号は適当にどちらかを選んでいる) 以下のようになる．

n	$a(n)$	$b(n)$	$\log\lvert a(n)\rvert/\log\lvert b(n)\rvert$
0	1	1	NA
1	-2	3	0.630929753571457
2	13	33	0.733574663395198
3	-1258	627	1.10811018104787
4	1975693	3548193	0.961177482019189
5	-16493036395498	15450886725747	1.00214931449425
6	510750150155086510667376013	1258058049053713634998656033	0.985553634620254

実際に $a(n)$ と $b(n)$ の桁数がほぼ一致していることが見て取れる．また，Silverman の定理とは直接関係はないが，桁数が指数的に大きくなっていくことが観察できる．実際桁数は n が 1 大きくなる毎に約 2 倍になっていることが見て取れる．これは実は後で述べる Kawaguchi-Silverman 予想の最も簡単なケースとみなすことができる．

さて，Silverman の定理の以下の高次元化が自然に考えられる．

問題 2.3 (Dynamical Lang-Siegel 問題 [1])**.** $N \geqslant 1$ とし，N 次元射影空間 $\mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$ の自己全射 $f\colon \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$ を考える．有理点 $x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ であってその f-軌道 $O_f(x)$ が *Zariski* 稠密なものを考える．軌道の斉次座標を

$$f^n(x) = (a_0(n) : \cdots : a_N(n)), \quad a_0(n), \ldots, a_N(n) \text{ は互いに素な整数}$$

と表す．いつ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |a_i(n)|}{\log |a_j(n)|} = 1, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant N$$

が成立するか？

この問題にアプローチするには 1 次元の時の Silverman の定理の仮定 (2.1) を高次元の場合に適切に拡張しなければならない．仮定 (2.1) は点 $(0:1), (1:0)$ の f による繰り返し逆像

$$\bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(0:1), \quad \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(1:0)$$

上で f があまり分岐していないという条件だと解釈できる．そこで講演者は一般に標数 0 の体上定義された滑らかな射影多様体の自己全射 $f\colon X \longrightarrow X$ に対して，以下の量に注目した．閉部分スキーム $Y \subset X$ に対して (上の例では $Y = \{(0:1), (1:0)\}$)

$$e(f, Y) := \lim_{n\to\infty} \sup\{e_{f^n}(z) \mid z \in X, f^n(z) \in Y\}^{1/n}.$$

但しここで

$$e_{f^n}(z) = \mathcal{O}_{X,z}/(f^n)^*\mathfrak{m}_{f^n(z)}\mathcal{O}_{X,z} \text{ の } \mathcal{O}_{X,z}\text{-加群としての長さ}$$

である．この $e(f, Y)$ は収束し，また実はある X 上の上半連続関数の Y 上での最大値としても定義できることがわかっている．この類の極限が良い性質を持つことや，具体的な例に対してはそれなりに計算可能であることは Dinh [7]，Favre [11] によって示されている．Gignac による [12] と講演者の論文 [16, section 4] も参照.

さて Dynamical Lang-Siegel 問題に戻ろう．Silverman の仮定 (2.1) はこの量を用いると

$$e(f, \{(0:1), (1:0)\}) < \deg f$$

と同値であることが証明できる．講演者は Silverman の定理の高次元化にあたる以下の定理を示した．

定理 2.4 ([16])**.** 問題 *2.3* の記号を用いる．f を定義する斉次多項式の次数を d とし，$d \geqslant 2$ とする．

(1) $e(f, \{(0:\cdots:0:1)\}) < d$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \max\{|a_0(n)|, \ldots, |a_{N-1}(n)|\}}{\log \max\{|a_0(n)|, \ldots, |a_N(n)|\}} = 1.$$

[1] Silverman の定理は楕円曲線の有理点の成分の桁数に対する Siegel の定理の力学系類似であり，そのアーベル多様体への一般化は Lang の予想 (Faltings によって [10] で証明されている) と呼ばれていた.

(2) *Vojta* 予想を仮定する．$H_i \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$ を第 i 成分が 0 である座標超平面とする．$e(f, H_i) < d$ で，さらに軌道 $O_f(x)$ が *generic* ならば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|a_i(n)|}{\log\max\{|a_0(n)|, \ldots, |a_N(n)|\}} = 1.$$

但し $O_f(x)$ が *generic* とは, $\#O_f(x) = \infty$ かつ任意の真の閉部分集合 $Z \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$ に対して $\#Z \cap O_f(x) < \infty$ ということである.

注意 2.5. (1) は実は $O_f(x)$ が無限という仮定だけで正しい．証明の鍵となるインプットはやはり Roth の定理である．(2) は Vojta 予想というディオファントス幾何における非常に強力な予想を仮定しているのだが，これを完全に外すのは現在のところ非常に難しいと思われる．Vojta 予想は Roth の定理の一般化であり，証明の方針を大きく変更しない限り自然に登場してくる．ここで用いている Vojta 予想の正確な主張は [16] を参照していただきたい.

注意 2.6. Silverman の定理も講演者の定理も，問題を局所高さ関数というものの漸近的挙動に置き換え，それに関するより一般的な定理を証明することで得られている．詳しくは [20], [16] を参照.

2.2 一様有界性予想

一般に力学系が与えられた時，その周期点は様々な情報を持っており，力学系を理解する手がかりになることが多い．数論力学系の文脈でもそれは同じだが，そもそも固定された代数体上でどれくらい周期点が存在するのかということが問題になる．実際例えば $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$ の自己射 $f\colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}, x \mapsto x^2 + c$ に対して f の周期点とはある n に対する方程式

$$f^n(x) = x$$

の解である．これは x についての次数 2^n の多項式であり，固定された数体上に解をそんなに持たないかもしれない．実際以下がよく知られている．(自己射の標準高さ関数と Northcott の定理を使えば良い．)

命題 2.7. K を代数体，$f\colon \mathbb{P}^N_K \longrightarrow \mathbb{P}^N_K$ を K 上定義された自己全射で同型ではないものとする．この時,

$$\mathrm{Per}(f, \mathbb{P}^N(K)) := \left\{ x \in \mathbb{P}^N(K) \;\middle|\; \text{ある } n \geqslant 0 \text{ に対して } f^n(x) = x \right\}$$

は有限集合．より一般に,

$$\mathrm{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K)) := \left\{ x \in \mathbb{P}^N(K) \;\middle|\; \#O_f(x) < \infty \right\}$$

とする時,

$$\# \bigcup_{[K;\mathbb{Q}] \leqslant D} \mathrm{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K)) < \infty.$$

ここで合併は代数体 K で $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数がある定数 D で抑えられているものにわたってとっている.

ここで導入した $\mathrm{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K))$ の元を f の擬周期点 (preperiodic point) と呼ぶ．擬周期点は各射 f に対しては固定された数体上有限個しかないわけだが，その個数は射 f にどの程度依存するのだろうか．すぐに

わかるように，f の次数を大きくしていくと，いくらでも多くの擬周期点を作ることができる．実際 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ の自己射 f をアフィン座標で以下のように定めてみる．

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m)$$

この時，0 は固定点であり，$1, 2, \ldots, m$ は全て 0 に写されるので擬周期点である．では次数を固定するとどうなるだろうか？ Morton-Silverman の以下の予想は，数論力学系における最も挑戦的な問題の一つだと言えるだろう．

予想 2.8 (Morton-Silverman's Uniform Boundedness Conjecture，一様有界性予想)**.** $d \geqslant 1$, $D \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ とする．この時定数 $C \geqslant 1$ が存在して，以下が成立する．代数体 K で $[K : \mathbb{Q}] \leqslant D$ なるものと，K 上定義された次数 d の自己全射 $f \colon \mathbb{P}^N_K \longrightarrow \mathbb{P}^N_K$ に対して

$$\#\,\mathrm{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K)) \leqslant C.$$

ここでは f の次数とは f を定義する斉次多項式の字数のことである．つまり第 1 力学次数のことである．

注意 2.9. 簡単な議論で $\mathrm{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K))$ を

$$\bigcup_{[K:\mathbb{Q}]\leqslant D} \mathrm{Preper}(f, \mathbb{P}^N(K))$$

に置き換えても良いことがわかる．

この予想は $N = 1$ の時でも一般に未解決である．この予想がいかに強力かを示す例として，楕円曲線のトーションパートの位数の有界性 (Mazur-Merel の定理) が従うことを指摘しておく．実際，E を代数体 K 上の楕円曲線とすると，以下の図式を作ることができる．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{[2]} & E \\ {\scriptstyle /\langle -1\rangle}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle /\langle -1\rangle} \\ \mathbb{P}^1_K & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1_K \end{array}$$

但し，[2] は 2 倍写像，縦の射は -1 倍作用による商，f は誘導される射である．この時，[2] の擬周期点集合はちょうど E のトーション点集合になる．一方 f は次数 4 の自己全射であるから，予想 2.8 からその K 上の擬周期点集合の位数は E によらずに一様に抑えられる．従って $E(K)$ のトーション部分群の位数も E によらずに抑えられることになる．

より一般に，アーベル多様体のトーション部分群の位数の有界性も予想 2.8 から従うことが知られている [9]．

さて一様有界性予想，特に $\mathbb{P}^1$ の自己射で $\mathbb{A}^1$ の自己射にもなっているもの (力学系の世界では多項式写像と呼ばれるもの) の擬周期点については多くの研究がある．全ての研究を紹介することはできないが，ここ数年の大きな進展だけ紹介したい．まず，一様有界性予想の関数体類似 (K を代数体ではなく関数体にしたもの) については以下の肯定的な結果が証明されている．

定理 2.10 (Doyle-Poonen [8])**.** $d \geqslant 2$，$D \geqslant 1$ とし，体 k を $\mathrm{char}\, k$ が d を割り切らないものとする．K を k 上の既約代数曲線の関数体とする．このとき，定数 $C \geqslant 1$ があり

$$\#\,\mathrm{Preper}(x^d + c, \mathbb{P}^1(L)) \leqslant C$$

が K の任意の有限次拡大 L で $[L:K] \leqslant D$ なるものと，$c \in L$ であって k 上代数的でないもの対して成立する．k が有限体なら c が k 上代数的でないという条件は外せる．

ここで $x^d + c$ は $\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1, x \mapsto x^d + c$ なる射を $\mathbb{P}^1$ に拡張したものとみなしている．

代数体の場合は講演者の知る限りこのレベルの肯定的な結果は一つも知られていない．しかし，Vojta 予想の非常に特別な場合であり，abc 予想の自然な一般化である abcd 予想というものを仮定すると Looper により以下のような肯定的な結果が知られている．(標数 0 の関数体の場合，Doyle-Poonen の一般化も与えている．)

定理 2.11 (Looper [14,15])**.** *K を代数体か標数 0 の 1 次元関数体とする．$f(x) \in K[x]$ を次数が $d \geqslant 2$ の多項式とする．K が代数体なら abcd 予想を仮定する．K が関数体なら f は non-isotrivial だと仮定する．このとき，d と K のみに依存する定数 $C \geqslant 1$ が存在して*

$$\# \operatorname{Preper}(f(x), \mathbb{P}^1(K)) \leqslant C$$

が成立する．

abcd 予想は任意の代数体上で高さ関数などを用いて定式化されるので一般的な形は [14] を参照してもらいたい．ここでは有理数体 $\mathbb{Q}$ に対する abcd 予想を高さ関数などを用いない形に翻訳しておく．

予想 2.12 ($\mathbb{Q}$ 上の abcd 予想)**.** *$n \geqslant 2$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある閉部分集合 $Z \subset (x_0 + \cdots + x_n) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ と定数 $C > 0$ が存在して以下が成立する：任意の整数 $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ で $\gcd(a_0, \ldots, a_n) = 1$ かつ $a_0 + \cdots + a_n = 0$ なるものに対して，$(a_0 : \cdots : a_n) \notin Z$ ならば*

$$\operatorname{rad}(a_0 \cdots a_n)^{1+\varepsilon} \geqslant C \max\{|a_0|, \ldots, |a_n|\}.$$

ここで rad は整数の根基を表す．

3 高次元の数論力学系

高次元の数論力学系の研究は近年活発になってきているが，まだまだ未開拓な領域だと言って良いと思われる．X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された射影多様体，$f\colon X \dashrightarrow X$ を支配的な有理写像とする．(射に限らず有理写像まで考える理由は，その方が力学系の観点から豊かで興味深い現象が起きるからである．また X としては任意の射影多様体を考えるが，$X = \mathbb{P}^N_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の場合が特に興味深いことが多いことを指摘しておく．それは $\mathbb{P}^N_{\overline{\mathbb{Q}}}$ が豊富な自己射，自己写像を持つからである．) 高次元数論力学系では f やその軌道を数論的観点から研究するわけだが，1 次元の時にはなかった基本的な問題がいくつかすぐに生じる．$x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ とする．まず，f が有理写像なので x の f-軌道は一般には定義できないかもしれない．そこで

$$X_f(\overline{\mathbb{Q}}) := \left\{ x \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \;\middle|\; f^n(x) \notin I_f, n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

という集合を考える．ただしここで I_f は f の不確定点集合である．この集合 $X_f(\overline{\mathbb{Q}})$ は可算集合から可算個の部分集合を取り除いた形をしているので直ちには元を持つかわからないのだが，Amerik により空集合ではないことが示されている [1]．[22] も参照．さらに f が有限位数 (i.e. ある $n \geqslant 1$ があり $f^n = \mathrm{id}$) でなければ，無限軌道が存在することも示されている．

さて，X が 1 次元の場合は無限軌道は自動的に Zariski 稠密軌道でもある．しかし X が 2 次元以上の場合

は，無限軌道というだけでは Zariski 稠密かどうかわからない．Zariski 稠密ではない軌道は，低次元の力学系の軌道だと見做せるので，興味深いのは Zariski 稠密軌道である．以下のような問題が自然に考えられる．

(1) Zariski 稠密軌道はいつ存在するのか？
(2) Zariski 稠密軌道は X の部分多様体とどの程度交わるのか？
(3) Zariski 稠密軌道が存在するとして，その数論的性質について何が期待できるのか？

一つ目と二つ目の問いは具体的な問題であり，それぞれ Zariski 稠密軌道予想，Dynamical Mordell-Lang 予想と呼ばれる予想が定式化されている．三つ目は数論力学系という分野そのものの根幹に関わる問いであり当然一つの主張にまとめられるような類のものではないが，ここでは Kawaguchi-Silverman 予想という問題を紹介することにする．

3.1 Zariski 稠密軌道予想

自己写像が定数でない有理関数を不変に保つ場合，各軌道上でその有理関数の値は一定になってしまうから Zariski 稠密軌道は存在し得ない．この逆が成り立つであろうというのが以下の予想である．

予想 3.1 (Zariski 稠密軌道予想．S.W. Zhang [23], Medvedev-Scanlon [19],)**.** k を標数 0 の代数閉体，X を k 上の射影多様体，$f\colon X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする．この時，以下は同値．

(1) ある $x \in X(k)$ があり，f-軌道 $O_f(x)$ は *well-defined (i.e.* $f^n(x) \notin I_f$, $n = 0, 1, \dots$*)* かつ X で *Zariski* 稠密．
(2) 支配的有理写像 $\pi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^1_k$ であって，以下の図式が可換になるものは存在しない．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & X \arrow[dl, dashed, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^1_k & \end{tikzcd}$$

注意 3.2.

(1) k が非加算 (e.g. $k = \mathbb{C}$) の時は，この予想は Amerik-Campana によって証明されている [2]．より代数的な証明は [3] を参照．
(2) 数論力学系の観点からは $k = \overline{\mathbb{Q}}$ の場合が興味深いのだが，この場合は一般に未解決である．

Zariski 稠密軌道予想については多くの研究があり，特殊な多様体や写像についての肯定的な結果が数多く知られている．ここでは最近の Xie による結果 [22] と講演者の結果だけ紹介することにする．Xie はこの論文で adelic topology というものを導入し，それを用いて Zariski 稠密軌道予想にアプローチした．$\mathbb{Q}$ 上の超越次元が有限な代数閉体 k とその上の有限型被約分離的スキーム X に対し，adelic topology は $X(k)$ 上の位相で k のあらゆる $\mathbb{C}_p$ への埋め込みの情報をもちつつガロア共役を反映して適切に荒くした位相であると言える．

定理 3.3 (Xie [22])**.** k を標数 0 の代数閉体で $\mathbb{Q}$ 上の超越次元が有限なものとする．X を k 上の滑らかな射影代数曲面とし，$f\colon X \longrightarrow X$ を自己全射だとする．このとき，f が予想 *3.1* の条件 *(2)* を満たすならば，空でない *adelic open set* $U \subset X(k)$ が存在して任意の $x \in U$ に対して x の f*-orbit* は *well-defined* かつ $O_f(x)$ は *Zariski* 稠密．特に，**任意**の標数 0 の代数閉体 k，k 上の滑らかな射影代数曲面，その上の自己全射に対し

て予想 *3.1* は正しい．

講演者は Long Wang との共同研究で Xie の adelic topology と後で説明する Kawaguchi-Silverman 予想に関連する技術を用いることで次の定理を証明した．

定理 3.4 (Matsuzawa-Wang [18])**.** *X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影多様体，$f\colon X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする．f が 1-cohomologically hyperbolic だとすると，空でない adelic open set $U \subset X(\overline{\mathbb{Q}})$ が存在して任意の $x \in U$ に対して x の f-orbit は well-defined かつ $O_f(x)$ は Zariski 稠密．*

注意 3.5. f が 1-cohomologically hyperbolic とは，f の第一力学次数が他の力学次数より真に大きいということである．例えば曲面の自己双有理写像であれば第一力学次数が 1 より真に大きいということと同値である．また 1-cohomologically hyperbolic は予想 3.1 の条件 (2) を自動的に満たすことが示せる．

3.2 Dynamical Mordell-Lang 予想

さて，一度 Zariski 稠密軌道の存在がわかった場合，その性質について何が言えるだろうか？例えば (標数 0 の) 体 k 上の準射影多様体 X 上の支配的自己射 $f\colon X \longrightarrow X$ が与えられていて，点 $x \in X(k)$ の軌道が Zariski 稠密だとする．このとき，軌道 $O_f(x)$ は部分多様体 $Z \subset X$ とどの程度交わるだろうか？ $O_f(x)$ はただの部分集合ではなく，代数的な写像によって作られているものだから，かなり特殊な部分集合だと考えられている．例えば極端な (しかし示唆的な) 例として，X がアーベル多様体，f が点 $a \in X(k)$ によるトランスレーション写像の場合を考える．この場合，$O_f(x) = \{x, x+a, x+2a, x+3a, \dots\}$ となり，これと部分多様体 $Z \subset X$ との交わりは Mordell-Lang 予想 (Faltings と Vojta の定理) から ($O_f(x)$ が Zariski 稠密かに関係なく) 以下を満たす：

$$\overline{O_f(x) \cap Z} = \bigcup_{i=1}^{r} (a_i + A_i), \quad a_i \in X(k),\ A_i \subset X \text{ は部分アーベル多様体.}$$

ここで左辺のオーバーラインはは Zariski 閉包を意味する．簡単な観察から

$$\{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \mid f^n(x) \in Z\} = \bigcup_{i=1}^{r} \{l_i + mk_i \mid m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

と，$l_i, k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ を用いて表せることがわかる (有限個の等差数列の合併になっている)．この事実をそのまま一般化したものが次の予想である．

予想 3.6 (Dynamical Mordell-Lang 予想)**.** k を標数 0 の代数閉体，X を k 上の準射影多様体，$f\colon X \longrightarrow X$ を自己射とする．$Z \subset X$ を X の閉集合とし，$x \in X(k)$ とする．この時，ある $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ と $l_i, k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, i = 1, \dots, r$ が存在して

$$\{n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \mid f^n(x) \in Z\} = \bigcup_{i=1}^{r} \{l_i + mk_i \mid m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

が成立する．

この予想を認めると，Zariski 稠密軌道は真の部分多様体 Z と有限回しか交わらないことが示せることを指摘しておく．(つまり generic ということ．) 実際，$\#O_f(x) \cap Z = \infty$ と仮定すると，ある $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ と $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ が存在して

$$f^{l+mk}(x) \in Z, \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

そこで W を $\{f^l(x), f^{l+k}(x), f^{l+2k}(x), \dots\}$ の Zariski 閉包とすると

$$O_f(x) \subset \{x, f(x), \dots, f^{l-1}(x)\} \cup W \cup f(W) \cup \cdots \cup f^{k-1}(W)$$

となり，右辺は $W \subset Z$ だから真の閉集合なので矛盾する．

Dynamical Mordell-Lang 予想に関しても多くの研究があり，様々な部分結果が得られている．問題の一般的な性質上，線形回帰列など数論力学系以外の分野との関連もあり，現在も活発に研究されている興味深い問題だと思う．興味のある方は例えば [5] を参照されると良いと思う．

さて，一般には予想 3.6 は未解決であるが，自己同型やより一般に étale 射の場合は軌道の p-進補完という手法を用いて肯定的に解決されている．

定理 3.7 (Bell-Ghioca-Tucker [4])**.** 予想 *3.6* は f が *étale* 射の場合正しい．

インフォーマルには p-進補完とは，写像 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \longrightarrow X(\mathbb{Q}_p), n \mapsto f^n(x)$ を p-進解析的な写像 $\mathbb{Z}_p \longrightarrow X(\mathbb{Q}_p)$ に拡張することである．これが可能ならば，解析関数の零点が $\mathbb{Z}_p$ 内で無限個あるとその関数は恒等的に 0 でなければならないということから Dynamical Mordell-Lang 予想が証明できる．

この p-進補完という方法は射が分岐していると同じようには使うことができない．例えば $\mathbb{P}^2$ の自己射に対しては Dynamical Mordell-Lang 予想は未解決である．

しかし，分岐点などの悪い場所を避けて p-進補完を使うことで “general” には Dynamical Mordell-Lang 予想は正しいことが知られている．

命題 3.8 (Xie [22])**.** k を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体の代数閉包，X を k 上の準射影多様体，$f\colon X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする．この時，空でない *adelic open set* $U \subset X(k)$ が存在して，任意の $x \in U$ に対してその f-軌道 $O_f(x)$ は *Dynamical Mordell-Lang* 予想の主張を満たす．

3.3 Kawaguchi-Silverman 予想

最後に Kawaguchi-Silverman 予想という軌道の数論的性質に関する問題の中で最も基本的なものを一つ紹介する．まずは射影空間の場合を用いてこの予想の意味するところを説明したいと思う．射影空間の自己写像

$$f\colon \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}} \dashrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}, (x_0 : \cdots : x_N) \mapsto (P_0 : \cdots : P_N)$$

を考える．ここで，$P_0, \dots, P_N \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_N]$ は ($\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_N]$ での) 最大公約元が 1 の同じ次数の整数係数斉次多項式とする．その共通の次数を d とおき，$d \geqslant 2$ と仮定する．この写像による有理点 $a = (a_0 : \cdots : a_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の軌道を考える．有理点の斉次座標 $a_0, \dots, a_N$ はいつでも整数にしてよく，さらに最大公約数が 1 であるようにすることができる．このとき

$$h(a) = \log \max\{|a_0|, \dots, |a_N|\}$$

を点 a の高さと呼ぶ．これは大体点 a を表すのに必要なビット数であり，点の数論的な複雑さを測る量である．(Weil 高さ関数の最も基本的な場合である．)

このとき，以下のような問題は自然であろう．

問題 3.9. $h(f^n(a))$ は n が増大する時どのように増大するか？

以下のような観察が直ちに行える．n 回合成 f^n の成分表示をまず考える．f をアフィン空間の自己写像と

みたものを

$$F\colon \mathbb{A}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{A}^{N+1}, (x_0,\dots,x_N) \mapsto (P_0,\dots,P_N)$$

とおき，$F^n = (P_0^{(n)},\dots,P_N^{(n)})$ とおく．このとき，$P_0^{(n)},\dots,P_N^{(n)}$ の $\mathbb{Z}[x_0,\dots,x_N]$ での最大公約元を G_n とおくと，

$$f^n = \left(\frac{P_0^{(n)}}{G_n} : \cdots : \frac{P_N^{(n)}}{G_n}\right) \tag{3.1}$$

とかける．この約分された多項式 $P_i^{(n)}/G_n$ の次数は f^n の実質的な幾何的複雑さを表していると見做せる．この次数を $\deg_1(f^n)$ と表すことにする．これらの記号を用いると以下がわかる．

$$h(f^n(a)) \leqslant \log\max\left\{ \left|\frac{P_0^{(n)}}{G_n}(a)\right|,\dots,\left|\frac{P_N^{(n)}}{G_n}(a)\right| \right\}.$$

この不等式から大雑把には

$$h(f^n(a)) \ll \deg_1(f^n)h(a)$$

が期待できる．多項式の係数などからくる項の問題があるのだが，それは以下のようにして処理できてこの観察は正当化でき最終的に不等式 (3.2) を示すことができる．

まず

$$\begin{aligned}
h(f^n(a)) &\leqslant \log\max\left\{ \left|\frac{P_0^{(n)}}{G_n}(a)\right|,\dots,\left|\frac{P_N^{(n)}}{G_n}(a)\right| \right\} \\
&\leqslant \log\left(2^{N+1+\deg_1(f^n)}\max\left\{\left\|\frac{P_0^{(n)}}{G_n}\right\|,\dots,\left\|\frac{P_N^{(n)}}{G_n}\right\|\right\}\max\{|a_0|,\dots,|a_N|\}^{\deg_1(f^n)}\right) \\
&\leqslant \deg_1(f^n)h(a) + (N+1+\deg_1(f^n))\log 2 + \log\max\left\{\left\|\frac{P_0^{(n)}}{G_n}\right\|,\dots,\left\|\frac{P_N^{(n)}}{G_n}\right\|\right\}.
\end{aligned}$$

ただしここで $\|\cdot\|$ は多項式のガウスノルム，つまり係数の絶対値の最大値を表す．ガウスノルムに対し次の不等式が成り立つことを指摘しておく (cf. [24, 命題 3.8])．$P, Q \in \mathbb{C}[x_0,\dots,x_N]$ に対して

$$\begin{aligned}
\|PQ\| &\leqslant 2^{N+1+\min\{\deg P, \deg Q\}}\|P\|\|Q\| \\
\|P\|\|Q\| &\leqslant e^{(N+1)(\deg P + \deg Q)}\|PQ\|.
\end{aligned}$$

これと，$\deg P_i^{(n)} = d^n$ に注意すると，以下のことがわかる：N のみに依存して決まるある定数 $C \geqslant 1$ が存在して

$$\max\left\{\left\|\frac{P_0^{(n)}}{G_n}\right\|,\dots,\left\|\frac{P_N^{(n)}}{G_n}\right\|\right\} \leqslant (C\max\{\|P_0\|,\dots,\|P_N\|\})^{nd^n} \quad n = 0,1,2,\dots.$$

従って $d = \deg_1(f)$ であることに注意すると

$$h(f^n(a)) \leqslant \deg_1(f^n)(h(a)+\log 2) + n\deg_1(f)^n\log\left(C\max\{\|P_0\|,\dots,\|P_N\|\}\right) + (N+1)\log 2.$$

この不等式を f^k $(k \geqslant 1)$ に対して適用すると

$$\begin{aligned} h(f^{nk}(a)) &\leqslant \deg_1(f^{nk})(h(a)+\log 2) + n\deg_1(f^k)^n \log\left(C\max\left\{\left\|\frac{P_0^{(k)}}{G_k}\right\|,\dots,\left\|\frac{P_N^{(k)}}{G_k}\right\|\right\}\right) + (N+1)\log 2 \\ &\leqslant \deg_1(f^{nk})(h(a)+\log 2) + n\deg_1(f^k)^n \log\left(C(C\max\{\|P_0\|,\dots,\|P_N\|\})^{k\deg_1(f)^k}\right) + (N+1)\log 2. \end{aligned}$$

従って，n, k に依存しない定数 $C_1, C_2 \geqslant 1$ を用いて

$$h(f^{nk}(a)) \leqslant C_1 \deg_1(f^{nk}) + C_2 nk \deg_1(f^k)^n \deg_1(f)^k$$

となる．よって

$$\limsup_{n\to\infty} h(f^{nk}(a))^{1/nk} \leqslant \max\{\lim_{n\to\infty} \deg_1(f^{nk})^{1/nk}, \deg_1(f^k)^{1/k}\}.$$

ここで右辺の極限

$$\lim_{n\to\infty} \deg_1(f^{nk})^{1/nk}$$

についてであるが，一般に以下の極限が存在することが知られている：

$$d_1(f) := \lim_{n\to\infty} \deg_1(f^n)^{1/n}.$$

この値は f の第一力学次数と呼ばれており，f の幾何的複雑さを表す不変量である．この記号を用いると

$$\limsup_{n\to\infty} h(f^{nk}(a))^{1/nk} \leqslant \max\{d_1(f), \deg_1(f^k)^{1/k}\}.$$

右辺は a に無関係な量なので，この不等式を $a, f^a, \dots, f^{k-1}(a)$ に適用することで

$$\limsup_{n\to\infty} h(f^n(a))^{1/n} \leqslant \max\{d_1(f), \deg_1(f^k)^{1/k}\}$$

が任意の $k \geqslant 1$ に対して成立することがわかる．右辺は $k \to \infty$ とすると $d_1(f)$ に収束するので，最終的に

$$\limsup_{n\to\infty} h(f^n(a))^{1/n} \leqslant d_1(f) \tag{3.2}$$

を得る．

多項式の繰り返し合成の係数の評価に少しややこしい計算があったが，この不等式の本質的な意味は以下のようなものである：f^n を計算する際の多項式レベルでの約分 (3.1) が $f^n(a)$ を計算する際の成分間の整数レベルでの約分を与えるが，それが高さ $h(f^n(a))$ の上からの評価を与えている．

整数レベルでの約分というのはランダムな状況では基本的にほぼ発生しないと考えるのが自然であるが，もしそのような約分が起こるならそれは多項式レベルでの約分から必ずくるということは言えるだろうか？それが漸近的には正しいと主張するのが以下の Kawaguchi-Silverman 予想である．

予想 3.10 ($\mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}}$ に対する Kawaguchi-Silverman 予想 cf. [21])**.** 上の記号のもと $O_f(a)$ が *Zariski* 稠密ならば

$$\lim_{n\to\infty} h(f^n(a))^{1/n} = d_1(f).$$

ここで登場した第一力学次数 $d_1(f)$ は実は任意の射影代数多様体の支配的自己有理写像に対しても定義できる．また，高さ関数 h も $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の任意の射影多様体上の $\overline{\mathbb{Q}}$ 点に対して定義することができる．詳しい定義はここでは省略するが，一般的な形での Kawaguchi-Silverman 予想を述べておく．

予想 3.11 (Kawaguchi-Silverman 予想 cf. [13])**.** X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の射影多様体，$f\colon X \dashrightarrow X$ を支配的自己有理写像，H を X 上の豊富因子とする．$h_H\colon X(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ を H に付随する *Weil* 高さ関数とする．このとき，任意の点 $x \in X_f(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して極限

$$\alpha_f(x) := \lim_{n\to\infty} \max\{1, h_H(f^n(x))\}^{1/n}$$

が存在し，さらに $O_f(x)$ が *Zariski* 稠密ならば

$$\alpha_f(x) = d_1(f)$$

が成立する．

この予想は一般には未解決である．近年多くの研究がなされており，様々な部分結果が知られている．現在までに知られていることのほぼ全てをまとめたサーベイ論文 [17] を最近執筆したので，詳細はそちらを参照してもらいたい．講演者と Long Wang との共同研究で得た最近の結果を一つだけ紹介しておく．

定理 3.12 (Matsuzawa-Wang [18])**.** X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影多様体，$f\colon X \dashrightarrow X$ を支配的有理写像とする．f が 1-*cohomologically hyperbolic* だとし，さらに点 $x \in X_f(\overline{\mathbb{Q}})$ が以下を満たすとする：

$$\begin{aligned}&\#O_f(x) = \infty \\ &\#O_f(x) \cap Z < \infty, \quad Z \subset X \text{ は任意の真の部分多様体.}\end{aligned}$$

このとき，$\alpha_f(x)$ は存在して

$$\alpha_f(x) = d_1(f).$$

注意 3.13. この条件を満たすような軌道を generic な軌道と呼ぶ．同じ論文 [18] で定理の仮定のもと generic な軌道が十分たくさん存在することも証明している．

参考文献

[1] E. Amerik. Existence of non-preperiodic algebraic points for a rational self-map of infinite order. *Math. Res. Lett.*, 18(2):251–256, 2011.

[2] E. Amerik and F. Campana. Fibrations méromorphes sur certaines variétés à fibré canonique trivial. *Pure Appl. Math. Q.*, 4(2):509–545, 2008.

[3] J. Bell, D. Ghioca, and Z. Reichstein. On a dynamical version of a theorem of Rosenlicht. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 17(1):187–204, 2017.

[4] J. P. Bell, D. Ghioca, and T. J. Tucker. The dynamical Mordell-Lang problem for étale maps. *Amer. J. Math.*, 132(6):1655–1675, 2010.

[5] J. P. Bell, D. Ghioca, and T. J. Tucker. *The dynamical Mordell-Lang conjecture*, volume 210 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[6] R. Benedetto, P. Ingram, R. Jones, M. Manes, J. H. Silverman, and T. J. Tucker. Current trends and open problems in arithmetic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 56(4):611–685, 2019.

[7] T.-C. Dinh. Analytic multiplicative cocycles over holomorphic dynamical systems. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 54(3-4):243–251, 2009.

[8] J. R. Doyle and B. Poonen. Gonality of dynatomic curves and strong uniform boundedness of preperiodic points. *Compos. Math.*, 156(4):733–743, 2020.

[9] N. Fakhruddin. Questions on self maps of algebraic varieties. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 18(2):109–122, 2003.

[10] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties. *Annals of Mathematics*, 133(3):549–576, 1991.

[11] C. Favre. *Dynamique des applications rationnelles.* PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2000.

[12] W. T. Gignac. *Equidistribution of preimages in nonarchimedean dynamics.* PhD thesis, 2013.

[13] S. Kawaguchi and J. H. Silverman. On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 713:21–48, 2016.

[14] N. R. Looper. Dynamical uniform boundedness and the *abc*-conjecture. *Invent. Math.*, 225(1):1–44, 2021.

[15] N. R. Looper. The uniform boundedness and dynamical lang conjectures for polynomials. *arXiv preprint arXiv:2105.05240*, 2021.

[16] Y. Matsuzawa. Growth of local height functions along orbits of self-morphisms on projective varieties. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (4):3533–3575, 2023.

[17] Y. Matsuzawa. Recent advances on Kawaguchi-Silverman conjecture. *arXiv preprint arXiv:2311.15489*, 2023.

[18] Y. Matsuzawa and L. Wang. Arithmetic degrees and Zariski dense orbits of cohomologically hyperbolic maps. *arXiv preprint arXiv:2212.05804*, 2022.

[19] A. Medvedev and T. Scanlon. Invariant varieties for polynomial dynamical systems. *Ann. of Math. (2)*, 179(1):81–177, 2014.

[20] J. H. Silverman. Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps. *Duke Math. J.*, 71(3):793–829, 1993.

[21] J. H. Silverman. Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 34(2):647–678, 2012.

[22] J. Xie. The existence of Zariski dense orbits for endomorphisms of projective surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 2022.

[23] S.-W. Zhang. Distributions in algebraic dynamics. In *Surveys in differential geometry. Vol. X*, volume 10 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 381–430. Int. Press, Somerville, MA, 2006.

[24] 森脇淳, 川口周, and 生駒英晃. モーデル-ファルティングスの定理: ディオファントス幾何からの完全証明. **サイエンス社**, 2017.